KiTaFachtexte

Wenn Vereinfachung zur Verfälschung wird: Wider die Banalisierung elementarer Mathematik

Thomas Royar

ALICE SALOMON HOCHSCHULE BERLIN
University of Applied Sciences

FRÖBEL
Kompetenz für Kinder

wiff
Weiterbildungsinitiative
Frühpädagogische Fachkräfte

KiTa Fachtexte ist eine Kooperation der Alice Salomon Hochschule, der FRÖBEL-Gruppe und der Weiterbildungsinitiative Frühpädagogische Fachkräfte (WiFF). Die drei Partner setzen sich für die weitere Professionalisierung in der frühpädagogischen Hochschulausbildung ein.

KiTaFachtexte

Wenn Vereinfachung zur Verfälschung wird: Wider die Banalisierung elementarer Mathematik

Thomas Royar

ABSTRACT

Das mathematische Lernen von Kindern beginnt bereits weit vor Schuleintritt. Dennoch findet zum Schulbeginn auch eine Zäsur gerade in Bezug auf dieses Lernen statt: Die Begriffe werden expliziter, die Inhalte systematischer und die Symbolisierungen standardisierter. Traditionell wird oft noch die Aufgabe der „Vorschule" darin gesehen, auf die Schule „vorzubereiten". Statt aber diese Aufgabe ernsthaft in Bezug auf das fachliche Lernen zu reflektieren, herrscht in der Praxis insbesondere im Bereich Mathematik ein fragwürdiger Umgang mit der Fachlichkeit vor. So finden sich in einschlägigen Werken zur vorschulischen mathematischen Förderung neben sehr Banalem teilweise auch objektiv falsche und sogar problematische Aufgabenstellungen, die letztlich die Kinder in ihrem Lernen nicht ernst nehmen. Der Artikel zeichnet einige dafür exemplarische Beispiele nach, erläutert die spezifische Problematik und skizziert Alternativen.

Wenn Vereinfachung zur Verfälschung wird: Wider die Banalisierung elementarer Mathematik

Thomas Royar

GLIEDERUNG DES TEXTES

INFORMATIONEN ZUM AUTOR

Dr. Thomas Royar ist Dozent an der Pädagogischen Hochschule der Nordwestschweiz im Institut für Vorschule und Unterstufe. Seine Arbeitsschwerpunkte sind Entwicklung und Diagnose des mathematischen Denkens bei Kindern und dessen adäquate Unterstützung, Rechenschwäche und Verständnis arithmetischer Operationen.

1. Einleitung: Mühsam, langweilig und sinnlos: Typisch Mathematik?

Der „Ernst des Lebens“ beginnt laut Volksmund in der Schule. Zu dieser Zäsur gehören dann auch das Ende der „Spielerei“ und „Kuschelpädagogik“. Dazu lernt man dann „richtig“ lesen, schreiben und rechnen.

Imageproblem der Mathematik

Man mag über solche holzschnittartigen Zuschreibungen schmunzeln oder den Kopf schütteln, sie wirken weit in die Praxis hinein. Besonders die Mathematik scheint sich wunderbar als Disziplinierungsinstrument zu eignen. Schließlich scheint es da keinerlei Diskussionsspielraum zu geben: Zwei mal drei ist sechs und eben nicht vier, auch wenn Pippi Langstrumpf dies lautstark behauptet. Was also ist ein sinnvoller erster Zugang zu einem Thema, das in so starkem Kontrast zur kindlichen Spielfreude und Kreativität zu stehen scheint? Die Antwort zahlreicher „Vorschulhefte“ (die in jeder Buchhandlung zu finden sind) auf diese Frage ist aus Sicht der Mathematik oft frustrierend: Statt die Kreativität der Kinder zu nutzen und das gemeinsame Ordnen als sinnstiftende mathematische Tätigkeit zu etablieren, werden vorgefertigte Schablonen angeboten, deren Motivation sich nur daraus speist, dass die Kinder schon „wie die Großen“ mit Zahlen umgehen dürfen oder, maximal extrinsisch, durch „lustige“ Comicfiguren, die den trockenen Stoff mit einem Fensterblick in die Fantasiewelt erträglicher zu machen versuchen.

Ein Beispiel findet sich im Heft „Fit für den Schulstart“ der Reihe „Die kleinen Lerndrachen“ (Kühne-Zürn et al. 2006). Gleich auf Seite 6 findet sich unter der Überschrift „Rate mal!“ ein Ausmalbild, das den Kindern das vermeintliche „Thema“ des Heftes nahebringen soll (siehe Abbildung 1).

Das Ausmalen kleiner Felder ist für viele Kinder in diesem Alter mühsam. Als Förderung der Feinmotorik und als Konzentrationsübung mag es eine gewisse Berechtigung haben, inhaltlich ist es hier nichtssagend. Relativ schnell wird die Arbeit zudem langweilig: Dass in dem Bild zwei Drachenfiguren, sechs Ziffern und sonst nur einfarbiger Hintergrund zu sehen sind, ist ziemlich bald ersichtlich. Und schließlich: Das Bild an sich ergibt keinen Sinn. Die Symbole stehen ohne einen Bezug zu irgendetwas und überdecken zum Teil monoton gefärbte Comicfiguren, die das Bild eher stören als auflockern. Zudem sind die Markierungen der Felder mit Punktebildern erfolgt, denen selbst wiederum keine Bedeutung zukommt. Kinder, die die zwei als Zahlwort und als Ziffer schon kennen, stellen möglicherweise verwundert fest, dass sie drei Punkte zählen und mit „gelb“ assoziieren, die Ziffer „3“ aber nicht gelb, sondern rot erscheint. Die Begründung für die Farbwahl auf dem Blatt wirkt an den Haaren herbeigezogen: „Diese Farben sind im Alltag übrigens im Straßenverkehr besonders wichtig“.

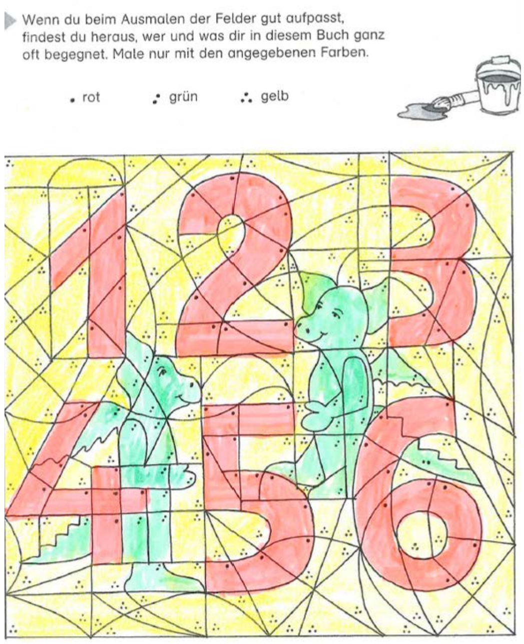

Abb. 1: *Einstiegsseite zum Thema „Mengen und Zahlen“ (ausgefüllt)*

2. Zahlen sind nicht Ziffern, Ziffern keine Zahlen

2.1 Was Zahlen und Buchstaben fundamental unterscheidet

Gleiche Wörter für Ziffern und Zahlen unter zehn

Es erscheint so einfach: A, B, C sind Buchstaben, mit denen man lesen und schreiben lernt und 1, 2, 3 sind Zahlen, mit denen man rechnen lernt. Allerdings gibt es große Unterschiede, denn analog zu Buchstaben müsste man streng genommen nicht von Zahlen sprechen, sondern von Ziffern. Buchstaben sind Symbole, die primär Laute, daraus gebildete Phoneme und schließlich zusammengesetzte Wörter repräsentieren und Ziffern sind Symbole, mit deren Hilfe Zahlen dargestellt werden. Unsere Sprache unterscheidet leider in der Bezeichnung nicht zwischen Ziffer und Zahl unter zehn, so dass z. B. „fünf“ sowohl für die Zahl als auch für die Ziffer steht. Das begünstigt das Missverständnis, dass einstellige Zahlen mit Ziffern identisch seien. Das wäre aber ungefähr so sinnig, als würde man die Buchstabenkombination EI für ein Hühnerprodukt halten und nicht das Ei selbst. Zahlen sind streng genommen Ideen und keine Dinge. Sie sind sehr praktische Erfindungen, mit deren Hilfe z. B. Eigenschaften von Mengen oder Reihenfolgen leichter kommunizierbar werden. Man kann sie mithin nicht „für sich“ ohne Bezug zu einer kontextualisierten Bedeutung lernen, die über die Symbol-Wort-Zuordnung hinausgeht. Versucht man dies doch, lernt man bestenfalls die Namen der Ziffern. Auf dem „Zifferblatt" einer klassischen Uhr befinden sich 15 Ziffern, mit denen 12 Zahlen symbolisiert werden. Die „eins" kommt dabei nur einmal als Zahl, aber fünfmal als Ziffer vor. Das Wort „Autobahn" besteht aus acht Buchstaben, aber nur sechs Lauten (Phonemen): au – t – o – b – ah – n. „a" kommt zweimal als Buchstabe, aber nur einmal als Laut vor – und es ist nur ein einziges Wort. Wirklich „verstehen" kann man das Wort allerdings nur, wenn man damit auch das assoziiert, was damit gemeint ist, nämlich eine bestimmte Form einer Schnellstraße. Natürlich kann man auch Unsinnswörter wie „Bamubilambi" „lesen", aber sie verweisen auf nichts außer auf eine Lautkombination. Zahlen entsprechen nun aber eher Wörtern einschließlich ihrer Bedeutung und sind somit viel komplexer als Buchstaben.

Lesen lernen kann über Buchstaben lernen beginnen, aber Rechnen lernen nicht über Ziffern lernen.

Es ist grundsätzlich möglich, beim Lesen lernen mit dem Buchstaben lernen zu beginnen, da sich Wörter aus Lauten bilden lassen, die durch Buchstaben und Buchstabenkombinationen symbolisiert werden. Dabei gibt es zwar Besonderheiten und Mehrdeutigkeiten, aber Buchstaben stehen immer für Laute, aus denen ein Wort gebildet wird, und die Kinder können die Wörter über ihren Klang wiedererkennen.

Mathematik und Rechnen lernen beginnt hingegen keinesfalls sinnvoll mit dem Erlernen von Ziffern, denn diese stiften keinerlei eigenen Sinn. Bei der Annäherung an Zahlen gilt es, kritisch hinzuschauen. Die bloße Kopplung von Ziffern und Anzahlen ist einerseits banal, andererseits bleiben dabei wichtige Aspekte des Zahlbegriffs außen vor.

2.2 Bedenkliche Beispiele und Alternativen

Zahlen stehen in Beziehungen zueinander

Was ist das eigentlich, „drei"? Bevor man jetzt allzu schnell mit „eine Zahl" antwortet (wobei die Antworten „eine Buchstabenkombination", „ein Wort", „die Bezeichnung für die Ziffer 3" ebenso zutreffend wären), lohnt es sich klarzumachen, was die „Zahl" ausmacht. Mehrere Aspekte kommen dabei zum Tragen. „Drei" ist eine mögliche Antwort auf unterschiedliche Fragen: Wie viele? An welcher Stelle? Welche Nummer? Wie viele Minuten noch? Wie viele Kilo? Wie viel Uhr? Wie alt? Welche Note? Was bleibt? Was ist das zusammen? Wie viele Euro? Was kommt nach „zwei"? Was ist die Hälfte von „sechs"? Man spricht in der Literatur von „Zahlaspekten", z. B. dem Kardinalzahlaspekt, dem Ordinalzahlaspekt, dem Codierungsaspekt, dem Maßzahlaspekt oder dem Rechenzahlaspekt (Padberg 2005, 14 f.). Ein wesentliches Wesen von Zahlen ist ihre Beziehung untereinander. Sie haben nicht nur eine feste Reihenfolge, sondern sie stehen in arithmetischen Beziehungen zueinander. So lässt sich eine Menge mit drei Elementen immer in zwei Teilmengen mit zwei und einem Element oder in drei Teilmengen mit je einem Element gliedern, aber niemals wird man eine Teilmenge mit vier oder mehr Elementen in ihr finden können.

Beim Zählen lernen wird dies Kindern schon früh bewusst: Um „richtig" zu zählen, werden die Zahlwörter in der immer gleichen Reihenfolge verwendet. Ordnet man aber auf Arbeitsblättern immer nur Ziffern unterschiedlichen Mengenbildern zu, wird sowohl einseitig auf den Anzahl- oder Kardinalaspekt der Zahl fokussiert als auch die Relationalität verschleiert.

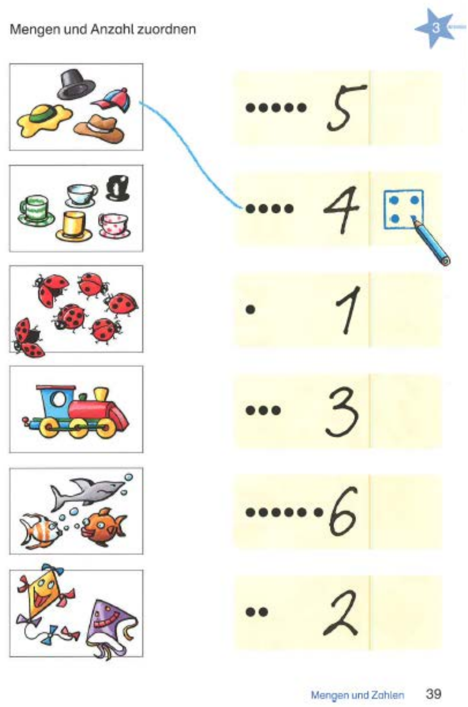

Abb. 2: *Menge – Punkte – Ziffer – Würfelbild*

Mehrdeutigkeiten sollten nicht verschleiert werden

Das Beispiel aus dem „kleinen Einstern" (Bauer et al. 2009) stellt Mengenbilder und Ziffern untereinander vollkommen beziehungslos dar. Bei den Punkten wäre der Zusammenhang noch ersichtlich, aber ansonsten dürfte den meisten Kindern sehr schleierhaft bleiben, weshalb die Hüte „zwischen" Fische und Tassen einzuordnen sind. Würde man nur die rechte Spalte verwenden, die Zahlen in der richtigen Reihenfolge präsentieren und die Kinder dann ganz rechts eigene (Mengen-)Bilder produzieren lassen (über die man dann gemeinsam kommunizieren könnte), hätte diese Seite schon massiv an Potenzial und Qualität gewonnen. Genau dieses verweist aber auf ein Grunddilemma vieler „Vorschulhefte": Im Bemühen nach möglichst „eindeutigen" Lösungen wird gerade die für den Verständnisaufbau notwendige Auseinandersetzung mit der Mehrdeutigkeit negiert und dadurch einer Auffassung immer wieder Vorschub geleistet, die elementares mathematisches Lernen banalisiert.

Ein Beispiel, das die Thematisierung der 4 fast vollständig von der Zahlbedeutung entkoppelt und stattdessen auf eine reine Ziffernwahrnehmung und -schreibanleitung hinzielt, findet sich wiederum bei den „kleinen Lerndrachen“ (Kühne-Zürn et al. 2006). Man wäre gespannt, wie die Autoren auf die Kinderfrage reagieren würden, was denn beispielsweise die Hand mit dem eingeklappten Daumen mit der „vier“ auf dem Bus zu tun habe. „Das eine ist die Anzahl der ausgestreckten Finger, das andere die Bezeichnung für die an der Zehnerstelle stehende Ziffer, und zu beidem sagen wir „vier“ – das wäre zwar korrekt, aber mit ziemlicher Sicherheit unverständlich.

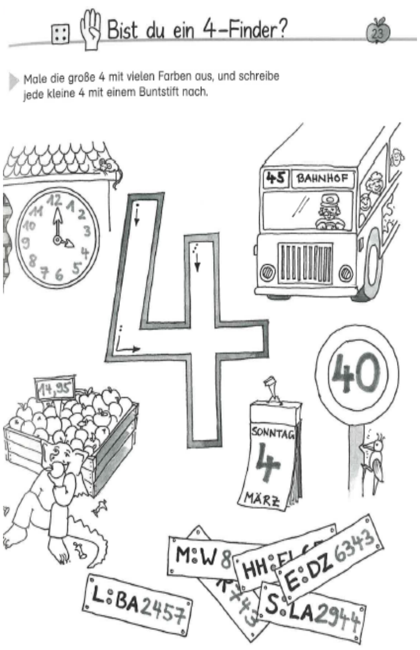

Abb. 3: *Was lässt sich hier über die „vier“ lernen?*

Nummer und Zahl ist nicht das Gleiche

Auch eine häufig anzutreffende Verknüpfung von Zahlenwissen mit motorischen Übungen ist nicht automatisch tatsächlich lernförderlich. Bewegungen sind flüchtig und werden primär über reine Zählprozesse an Anzahlen geknüpft. Der notwendigen Anschauung dienen sie wenig. Die oft in Kindergärten anzutreffende „Nummerierung“ von Treppenstufen veranschaulicht zumindest die Reihenfolge der Zahlen, aber nur, wenn man die Ziffern bereits „entziffern“ kann.

Alternativen

Kinder lernen wenig über Zahlen, indem sie Ziffern lernen und diese mit Mengenbildern oder Bewegungsmustern verknüpfen. Notwendig ist eine reflektierte Betrachtung von Eigenschaften und Beziehungen. Statt z. B. Würfelbilder nur als alternative Zahlsymbole zu betrachten, könnte man Kinder dazu anregen, sich intensiv damit auseinanderzusetzen. Zum Beispiel wäre es sinnvoll, die Würfelbilder mit beweglichen Gegenständen wie z. B. Muggelsteinen nachzubilden, sie zu verändern, detailliert zu vergleichen, sie ineinander zu überführen und eigene Würfelbilder erfinden zu lassen. An der Würfelfünf lässt sich sehr schön zeigen, wie sich diese aus der drei und der zwei und auch aus der vier und der eins zusammensetzt; entsprechend könnte man auch dazu anregen, Würfelbilder der sechs zu entwerfen, bei denen man die Zusammensetzung aus eins und fünf, zwei und vier sowie drei und drei besonders gut sehen kann. Erst wenn entsprechende Vorstellungen über diese Beziehungen aufgebaut sind ist es sinnvoll, die Ziffern als Symbole einzuführen.

3. Quadratische Rechtecke und viereckige Vierecke

3.1 Die anspruchsvolle Klasseninklusion

Tier oder Säugetier ist keine sinnvolle Frage

Ein wichtiges Werkzeug in der Mathematik ist das Zusammenfassen von Gegenständen oder Phänomenen anhand definierter Merkmale in so genannte Klassen. Der entsprechende Vorgang wird „Klassifizieren“ genannt. So lassen sich beispielsweise alle Tiere in Säugetiere, Vögel, Fische und Übrige einteilen, die Säugetiere in eierlegende Säugetiere (Schnabeltier und Ameisenigel), Beuteltiere und höhere Säugetiere und die höheren Säugetiere wiederum in zahlreiche Ordnungen. Ein Hund gehört nun mehreren „Klassen“ (gemeint ist hier nicht nur der spezielle Klassenbegriff der zoologischen Systematik, demzufolge der Hund zu den Säugetieren gehört) an: Er ist ein Tier, ein (höheres) Säugetier, ein (hundeartiges) Raubtier, ein Haustier, ein Vierbeiner usw. Der Vergleich von Objekten aus verschiedenen Klassen erscheint relativ einfach, wenn diese Klassen disjunkt sind, d. h. wenn es keine Überschneidungen oder Verschachtelungen gibt. Die Frage, in welche „Klasse“ etwas gehört, ist dann eindeutig zu beantworten. Ein Hund ist zweifelsohne ein Vierbeiner und ein Huhn ist das nicht. Schwieriger wird es aber nun, wenn man Hund und Huhn über verschiedene Ebenen vergleichen will. Man würde über einen Satz wie „das Huhn ist ein Tier und der Hund ist ein Säugetier“ stutzen, obwohl er inhaltlich korrekt ist. Und niemand käme auf die Idee, die Aussage „der Hund ist ein Tier“ als falsch zu bezeichnen mit der Anmerkung, er sei schließlich ein Säugetier. In einem seiner berühmten Experimente hat Jean Piaget versucht nachzuweisen, dass Kinder bis zu einem gewissen Alter nicht in der Lage sind, die so genannte Klasseninklusion zu verstehen. Auf die Frage, ob auf einem Bild, auf dem Primeln abgebildet waren, ein Strauß aus den gelben Primeln mehr oder weniger Blumen enthält als ein Strauß aus allen Primeln, antworteten die Kinder mit „das ist gleich". Piaget erklärt diese Schwierigkeit damit, dass das Kind nach erfolgter Klassifikation in „gelbe Primeln" diese nicht mehr in die Oberklasse „Blumen" reklassifizieren kann. Allerdings darf die Schwierigkeit der sprachlichen „Verschachtelung" nicht außer Acht gelassen werden. Beim Klassifizieren selbst wenden Kinder nämlich auch schon in dieser Phase hierarchische Strukturen an (vgl. Ginsburg, Opper 1975, S. 156 ff.). Jedenfalls lässt sich aus Piagets Untersuchungen nicht sinnvoll ableiten, dass man Kindergartenkindern ausschließlich disjunkte Klassen (das heißt Klassen, die keine gemeinsamen Elemente aufweisen) nahebringen sollte und schon gar nicht, dass man mit fehlerhaften Begriffen operiert, wie das gerade bei einfachen geometrischen Klassifikationen immer wieder zu beobachten ist.

Sprachliche Herausforderung

3.2 Bedenkliche Beispiele und Alternativen

Rechteckeck oder Quadrat ist keine Frage

In der Mathematik klassifiziert man Vierecke in unterschiedlichen Kategorien, die teilweise stark untereinander verschachtelt sind. Die Sprache verfügt über zahlreiche Bezeichnungen für unterschiedliche Vierecksklassen wie z. B. Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Raute, Trapez, Drachen. Betrachtet man nur die Begriffe „Viereck", „Rechteck" und „Quadrat", die oft im Kindergarten neben „Kreis" und „Dreieck" thematisiert werden (vgl. z. B. Berliner Bildungsprogramm, 142: „einige geometrische Formen erkennen (Kreis, Viereck, Dreieck, Rechteck, Quadrat)"), so liegt hier eine zweifache Inklusion vor: Alle Quadrate sind Rechtecke und alle Rechtecke sind Vierecke. Es ist also sinnlos, etwa zwischen „Quadrat" und „Viereck", zwischen „Quadrat" und „Rechteck" oder zwischen „Rechteck" und „Viereck" zu unterscheiden in dem Sinne, dass man eine Figur dabei dem einen oder dem anderen Begriff zuordnen soll. Leider sind gerade solche Aufforderungen aber häufig zu finden.

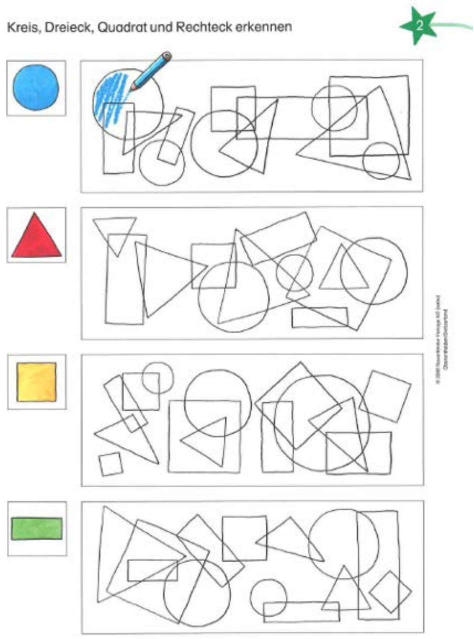

Abb. 4: *Rechtecke erkennen?*

Alle Quadrate sind zueinander ähnlich, bei Rechtecken ist das nicht der Fall.

Das Beispiel in Abbildung 4 aus dem „kleinen Einstern“ zeigt bei der vierten Aufgabe gleich zwei problematische Fehler: Einerseits sollen wohl die drei Quadrate, die im Bild zu finden sind, vermutlich nicht als „Rechtecke“ gelten, andererseits wird durch die jeweilige Vorgabe eines Prototypen hier eine andere Anforderung gestellt als bei den drei vorherigen Aufgaben. Kreise, gleichseitige Dreiecke (eine weitere problematische „Vereinfachung“ bei der zweiten Aufgabe, die „Dreiecke“ unausgesprochen mit „gleichseitige Dreiecke“ gleichsetzt) und Quadrate, die dort vorkommen, sind jeweils zueinander ähnlich, d. h. man kann sie durch bloße Vergrößerung oder Verkleinerung ineinander überführen, alle Verhältnisse und Winkel sind gleich. Bei Rechtecken ist dies nicht der Fall, dort ist lediglich eine Winkelgleichheit gegeben, die Seitenverhältnisse können stark variieren. Die Kinder müssen bei der letzten Aufgabe also eine andere Strategie anwenden, als nach Figuren zu suchen, die sich durch „zoomen“ der Ausgangsfigur anpassen lassen. Sie benötigen bereits ein geometrisches Konzept des Rechtecks (vier rechte Winkel), an dem sie ihre Suche ausrichten. Es ist geradezu fahrlässig, dieses Konzept dadurch dann wieder zu negieren, dass der Sonderfall Quadrat willkürlich ausgeschlossen wird. Und das ist so gedacht, denn ansonsten würden sich im letzten Bild rechts die beiden Vierecke nicht überlappen.

Alternativen

Sollen die Begriffe Viereck, Rechteck und Quadrat angemessen thematisiert werden, ist gerade die bewusste Lenkung der Aufmerksamkeit auf den Aspekt der Klasseninklusion fundamental, was in der Regel im Rahmen einer materialgestützten Gesprächssituation besser gelingen kann als mittels eines Arbeitsblatts. Gerade wenn sich das Lernen nicht auf eine banale Oberflächenorientierung an Prototypen orientieren soll, sondern das Schärfen des Begriffsverständnisses zum Ziel hat, bietet sich hier eine lohnende Herausforderung. Ein differenzierendes Klassifizieren nach wechselnden Kategorien ist eine Übung, die auch generell gegenüber allzu leichtfertigem Schubladendenken sensibilisieren kann. Es ist geradezu erfrischend, mit Kindern darüber zu philosophieren, weshalb man für „Vierecke" mehrere Namen hat – oder ein „Quadrat" mit einem „Rechteck" darüber streiten zu lassen, ob sie nicht beide Quadrate (nein) oder beide Rechtecke sind (ja). Analogien sind hierbei zum Beispiel Namen für Hunderassen oder ein „Streit" zwischen einem Teddybären und einem anderen Stofftier, wer ein Stofftier und wer ein Teddybär ist.

4 . Sinnlose Aktionen statt sinnvoller Beziehungen

4.1 Der tiefere Sinn der Terme

Es gibt keine eins-zu-eins-Entsprechung zwischen mathematischen Termen und Sachsituationen

Was „bedeutet" ein Ausdruck wie „2 + 3"? Formulierte man die Frage anders, nämlich „was ist zwei plus drei?", dann fiele einem wohl umgehend das „Ergebnis" „fünf" ein. Aber was bedeutet dann 2 + 3 = 5? Dass „zwei" und „drei" „fünf ergeben" ist nur eine sprachliche Umkodierung, die nichts über die Sinnhaftigkeit der Ausdrücke 2 + 3 und 2 + 3 = 5 aussagt. Terme wie 2 + 3 haben zumindest eine statische, relationale und eine dynamische, operationale Bedeutung. Einerseits sind sie zu verstehen als alternative Bezeichnungen von Zahlen, im Beispiel ist 2 + 3 ein anderer Ausdruck für 5, andererseits sind sie als Teilbeschreibungen von Prozessen zu interpretieren, im Beispiel kann 2 + 3 bedeuten, dass von der Zahl zwei ausgehend drei Zahlen „weitergezählt" wird. Allerdings gibt es keinen allgemeingültigen und auch keinen abschließenden Katalog von Prozessen, die tatsächlich die Addition als solche definieren (vgl. Davis et al., 1996, 72). Außer „weiterzählen" kommen u. a. auch „dazuzählen", „hinzufügen", „zusammenlegen", „ergänzen", „vermehren", „wachsen", „gewinnen", „vereinigen", „dazukommen", „zusammenfassen" in Frage (Royar 2013, 23). Gleiches gilt für die Subtraktion, die Zahlen als Teilmengen größerer Zahlen beschreiben kann, Unterschiede zwischen zwei Zuständen (Differenzen) oder Ergebnisse von Prozessen wie „rückwärtszählen", „wegnehmen", „vermindern", „trennen", „verlieren" etc. Die realen Situationen – ob in der mentalen Vorstellung oder im konkreten Vollzug – sind immer reichhaltiger als die mathematische Symbolik. Gleichzeitig ist jene in ihrer Universalität aber immer auch deutungsmächtiger als kontextgebundene Beschreibungen. Dieses Spannungsfeld der Mathematik macht ihr faszinierendes Wesen aus und kann nicht durch vereinfachende Zuordnungen aufgelöst werden.

4.2 Bedenkliche Beispiele und Alternativen

+ ist keine Handlungsanweisung

Entsprechend ist es nicht sinnvoll, die Addition oder gar das Zeichen „+“ dahingehend zu „erklären“, dass damit eine ganz bestimmte Handlung „gemeint“ sei. Analog ist das auch für die anderen Grundrechenarten der Fall, insbesondere „bedeutet“ auch ein „–“ nicht, dass etwas „wegzunehmen“ sei. Wird dies dann auch noch mit fragwürdigen Sachsituationen verbunden, bei denen wie aus dem Nichts Gegenstände erscheinen oder ohne erkennbaren Sinn etwas „durchgestrichen“ werden muss, beraubt man die Operationen ihres umfassend reichen Charakters und reduziert sie auf wenig relevante, extrem künstlich wirkende Handlungen. Die beiden folgenden Seiten aus den „Lerndrachen“ können als besonders misslungene Versuche einer kindgemäßen Veranschaulichung von Addition und Subtraktion betrachtet werden.

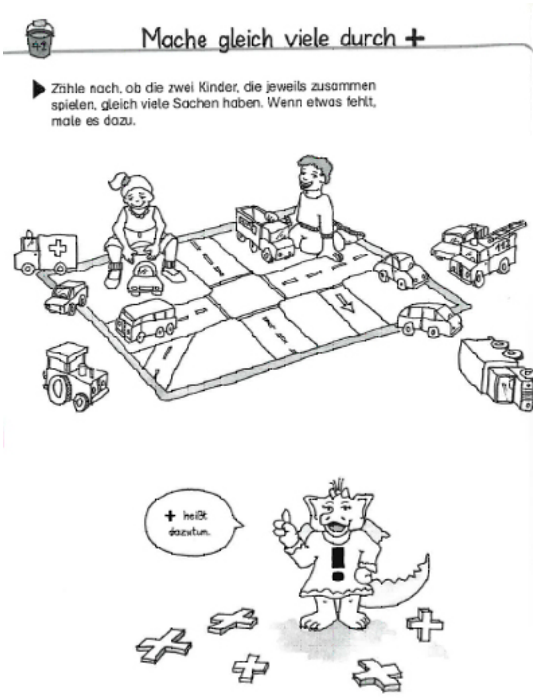

Abb. 5: *Ein Kreuz heißt gleich viele machen, dazu malen, dazutun?*

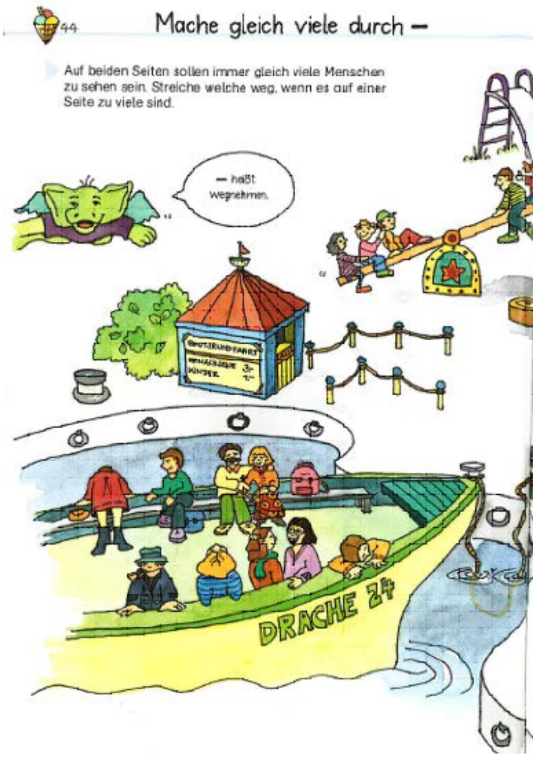

Abb. 6: *Ein Strich heißt gleich viele machen, durchstreichen, wegnehmen?*

Alternativen

Mathematische „Rechenoperationen" sind weder reine Gedankenspiele, noch finden sie exakte eins-zu-eins-Entsprechungen in der Realität. Es ist gerade die Wechselbeziehung, die sie zu weitreichenden Werkzeugen der Umwelterschließung macht. Die Verknüpfung vielfältiger Vorstellungen und Handlungserfahrungen mit Additions- und Subtraktionstermen kann im Anfangsunterricht statt über Arbeitsblätter gut über „Plus-" oder „Minuswerkstätten" angeregt werden, indem zum Beispiel über einen längeren Zeitraum Bilder, Situationen, Erzählungen, Tätigkeiten u. ä. gesammelt werden, die beispielsweise zu einem Ausdruck wie 2 + 3 „passen". Dabei kann man sowohl die berühmten „Äpfel und Birnen" zusammenzählen, aber auch am Kalender vom Zweiten des Monats drei Tage weiter gehen, die fünf Finger einer Hand in zwei und drei teilen, beim Würfelspiel eine zwei und eine drei würfeln oder auch zu zwei Kindern noch drei dazusetzen.

5. Einfältige Muster

5.1 Muster: Mehr als Wiederholungen

Der Begriff des „Musters“ darf nicht zu eng verstanden werden.

Der Begriff des „Musters“ ist ausgesprochen vielseitig. Er wird sogar dazu genutzt, um die Mathematik insgesamt zu charakterisieren. So schreibt beispielsweise Devlin: „Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. Der Mathematiker untersucht abstrakte „Muster“ – Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter. Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende.“ (Devlin 1998, 3). Merkmale eines Musters sind das Vorhandensein einer Einheit, die selbst noch nicht das Muster darstellt, und einer Regelhaftigkeit, die eine wiederkehrende Erscheinungsform der Einheit beschreibt. So kann ein Muster eine einfache Vorlage sein, die man unverändert oder mit kleinen Ergänzungen duplizieren kann (z. B. ein Musterbrief), eine zu wiederholende Abfolge (z. B. ein Webmuster), aber auch das klassifizierbare Erscheinungsbild einer komplexen Struktur (z. B. das Muster eines Zellverbandes in der Biologie). Das Wesen eines Musters liegt in seiner Reproduzierbarkeit, was sich aber nicht nur auf eine simple Wiederholung beschränken muss. Am Beispiel von Zahlenmustern, d. h. von Mustern, bei denen natürliche Zahlen die Einheiten bilden, lässt sich das gut erläutern.

Erst eine Regelhaftigkeit macht ein Muster zu einem Muster.

Das Muster 3-5-2-3-5-2-3-5-2-… ist durch die fortdauernde Wiederholung der Abfolge 3-5-2 hinreichend beschrieben. Aber auch die Folge 2-3-4-5-… bildet ein Muster, ohne dass sich die Zahlen selbst wiederholen. Die Regelhaftigkeit, die hier das Muster konstituiert, ist eine „Fortgesetzte Addition von 1“. Und die Folge 3-5-6-7-2-3-1-1-3-2-7-6-… findet eine sinnvolle, musterhafte Fortsetzung unter Berücksichtigung der Symmetrie. Es ist nicht schwer, sich weitere musterhafte Zahlenfolgen vorzustellen, wobei weiterhin zu bedenken ist, dass in den Beispielen außer den „naheliegenden“ Fortsetzungen auch prinzipiell andere möglich sind. Die Folge 2-3-4-5 etwa könnte statt mit 6-7-8 auch fortgesetzt werden mit 4-3-2, 2-3-4 oder komplexeren Regelhaftigkeiten folgend auf weitere Arten. Streng genommen ist die Aufgabe, ein Muster, das nur durch die Angabe von Einheiten „vorgegeben“ ist, „fortzusetzen“ nicht eindeutig lösbar. Ein Muster muss gewissermaßen erst „entschlüsselt“ werden, wenn es tatsächlich greifbar werden soll. Erst die Beschäftigung mit der zugrunde liegenden Struktur hebt es von der Banalität purer Reproduktion auf die Stufe einer der Analyse zugänglichen Ordnung. Wir können ein „Tigerfellmuster“ von einem „Leopardenfellmuster“ unterscheiden und richtig zuordnen, ohne dass dazu die beiden Muster reine Wiederholungen von bereits Gesehenem sein müssen.

5.2 Bedenkliche Beispiele und Alternativen

Als Kind war der Autor fasziniert davon, dass sich Dachziegel und Fischschuppen mit der gleichen Zeichentechnik sehr leicht skizzieren ließen. Über- bzw. nebeneinandergesetzte, U-förmige Bögen reichten aus, um die Flächen so zu füllen, dass sie entsprechend zu erkennen waren. Sicher irritiert wäre er gewesen, wenn ihm ein solcher „Fisch“, wie er im „kleinen Einstern“ zu finden ist, begegnet wäre:

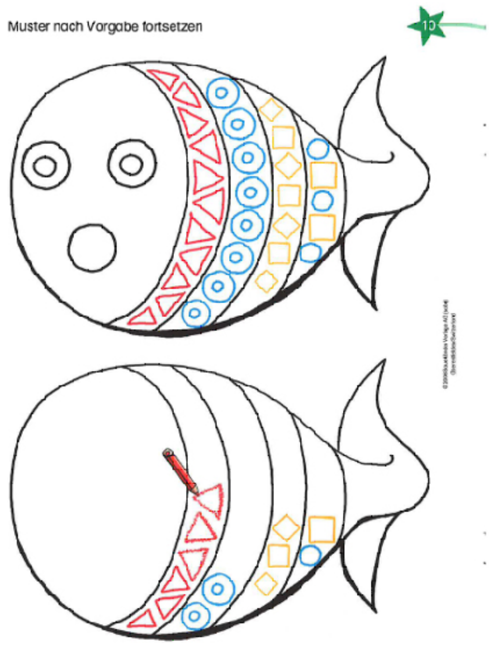

***Abb. 7:** Muster fortsetzen oder langweiliges Abmalen?*

Weder der Kontext noch die Kinder werden ernst genommen.

Hier beschränkt sich die Beschäftigung mit dem „Muster“ auf reine Reproduktion und der Kontext lässt zudem auf einen zweifelhaften Musterbegriff schließen. Wie ist die Kontextualisierung „Fisch“ hier begründet? Weder gibt es solche Fische, noch legen die verwendeten Dreiecke, Kreise und Quadrate Assoziationen zu Fischen nahe. Die Verbindung „Muster“ und „Fisch“ gerät hier zu einer Loose-Loose-Situation: Weder das Wissen über Fische noch das Wissen über Muster wird durch diese Übung auch nur annähernd vertieft. Dabei böten Fische aufgrund ihres Schuppenmusters ebenso gute Zugänge wie Muster aus geometrischen Figuren, wie sie zum Beispiel auf Teppichen (siehe Abbildung 8) zu finden sind.

Abb. 8: Teppichmuster aus Dreiecken (Quelle: http://www.knuepfen.ch/Web_knuepfen/Teppiche%20aus%20Schurwolle_knuepfen.html)

Alternativen

Betrachtungen von Mustern, die Beschreibung ihrer Eigenschaften, ihre Nachbildung, das Ausprobieren unterschiedlicher „Fortsetzungen“, ihr Verändern – all das sind Möglichkeiten, sich dem Begriff „Muster“ zu nähern. So könnte ein Bildausschnitt mit einer musterhaften Struktur unterschiedlich fortgesetzt werden, eine Reihe von Gegenständen „sinnvoll“ ergänzt, ein vorhandenes Muster farblich variiert oder eigene musterhafte „Designs“ entworfen werden. Auch das Identifizieren von „Störungen“ in symmetrischen oder sich wiederholenden Mustern ist oft reizvoller, als diese mühevoll nur zu reproduzieren.

Darüber hinaus gehören zum Begriff „Muster“ auch zunächst weniger mathematisch anmutende Kontexte wie Bewegungsmuster, Handlungsmuster oder Denkmuster.

Und nicht zuletzt sind auch die „Schönheitsformen“, die mit Hilfe der Fröbelschen Gaben gestaltet werden können, nichts anderes als geometrische Muster (siehe http://www.friedrich-froebel-online.de/s-p-i-e-l-g-a-b-e-n/spielgabe-5b-nach-goldammer/sch%C3%B6nheitsformen/)

6. Zusammenfassung

Elementare Mathematik ist nicht banal und kann auch nicht banalisiert werden, ohne dass man ihr damit Wesentliches nimmt. Im Bemühen um vermeintliche „Vereinfachung“, „Kindgemäßheit“ oder „Anschaulichkeit“ kommt es bei der Gestaltung von mathematischen „Vorschulheften“ zu typischen fachlichen Fehlern, die mehr Verwirrung stiften als verlässliche Lerngrundlagen zu sichern. Im Artikel wurde dies exemplarisch an zwei relativ weit verbreiteten Erzeugnissen illustriert und es wurden jeweils fachlich tragfähige und didaktisch angemessene Alternativen aufgezeigt. Ausdrücklich sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass einerseits die genannten Werke auch zahlreiche sinnvolle Übungen für Kinder bereithalten und andererseits die skizzierten Fehler in einer Vielzahl vergleichbarer Werke in der beschriebenen oder einer ähnlichen Art ebenfalls zu finden sind.

7. Fragen und weiterführende Informationen

7.1 Fragen und Aufgaben zur Bearbeitung des Textes

?

FRAGE 1:

Worin liegt das „Imageproblem“ der Mathematik beim Schulanfang?

?

FRAGE 2:

Was versteht man unter „Zahlaspekten“ und welche gibt es?

?

FRAGE 3:

Welches sind die notwendigen Eigenschaften einer Struktur, damit für sie die Bezeichnung „Muster“ passend ist?

!

AUFGABE 1:

Erläutern Sie, inwiefern die Begriffe „Buchstaben“ und „Zahlen“ Elemente auf unterschiedlichen Ebenen bezeichnen.

!

AUFGABE 2:

Recherchieren Sie zum Begriff „Haus der Vierecke“. Machen Sie sich anhand der Beziehungen zwischen den Begriffen klar, welche Inklusionen dabei vorkommen. Beispiel: Der Begriff Quadrat inkludiert die Begriffe Rechteck, Raute, Parallelogramm, Trapez, Drachen und Viereck.

!

AUFGABE 3:

Zu den mathematischen Grundrechenarten gibt es jeweils vielfältige mögliche Grundvorstellungen, d. h. Vorstellungen von Tätigkeiten, Ereignissen oder Beziehungen, die mit Hilfe eines Terms in ihrer Grundstruktur beschrieben werden können. Nennen Sie für die Addition und für die Subtraktion jeweils mindestens fünf unterschiedliche Grundvorstellungen außer „dazutun“ und „wegnehmen“.

7.2 Literatur und Empfehlungen zum Weiterlesen

LITERATURVERZEICHNIS

Bauer, R. et al. (2009): Der kleine Einstern (Schweizer Ausgabe). Oberentfelden: Sabe Sauerländer.

Berliner Bildungsprogramm für Kitas und Kindertagespflege. Online-Ressource: https://www.berlin.de/sen/bildung/schule/bildungswege/fruehkindliche-bildung/ (Zugriff am 26.07.2016)

Davis, P. et al. (1996): Erfahrung Mathematik. Basel: Birkhäuser.

Devlin, K.: (1998): Muster der Mathematik. Heidelberg: Spektrum.

Ginsburg, H.; Opper, S.(1975): Piagets Theorie der geistigen Entwicklung. Stuttgart: Klett-Cotta.

Kühne-Zürn, Dorothee et al. (2006): Die kleinen Lerndrachen. Fit für den Schulstart. Mengen und Zahlen, Formen und Farben, Konzentration. Stuttgart: Klett.

Padberg, F. (2005): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Spektrum

Royar, T. (2013): Handlung – Vorstellung – Symbolisierung. Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

http://www.friedrich-froebel-online.de/s-p-i-e-l-g-a-b-e-n/spielgabe-5b-nach-goldammer/sch%C3%B6nheitsformen/ (Zugriff am 26.07.2016)

EMPFEHLUNGEN ZUM WEITERLESEN

Dehaene, S. (1999): Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können. Basel: Birkhäuser.

Devlin, K (2000).: Das Mathe-Gen. Stuttgart: Klett-Cotta.

Royar, Th. (2013): Streifzüge Elementarmathematik. Norderstedt: Books on demand.

7.3 Glossar

Ähnlichkeit Zwei Figuren sind zueinander ähnlich, wenn sie in Winkeln und Seitenverhältnissen übereinstimmen

Klassifikation Einteilung in Gruppen anhand von Merkmalen

Ziffern Symbole, mit deren Hilfe Zahlen geschrieben werden können; analog zu Buchstaben der Schrift

Zahlaspekte Kontexte, in denen Zahlen verwendet werden

KiTa Fachtexte ist eine Kooperation der Alice Salomon Hochschule, der FRÖBEL-Gruppe und der Weiterbildungsinitiative Frühpädagogische Fachkräfte (WiFF). KiTa Fachtexte möchte Lehrende und Studierende an Hochschulen und Fachkräfte in Krippen und Kitas durch aktuelle Fachtexte für Studium und Praxis unterstützen. Alle Fachtexte sind erhältlich unter: www.kita-fachtexte.de

Zitiervorschlag:
Royar, T. (7.2016): Wenn Vereinfachung zur Verfälschung wird: Wider die Banalisierung elementarer Mathematik. Verfügbar unter: http://www.kita-fachtexte.de/XXXX (Hier die vollständige URL einfügen.). Zugriff am TT.MM.JJJJ